Analyse 3 - Feuille 1

Séries numériques

Calcul de la somme d'une série numérique

Exercice 1- Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série avec sommes partielles données par $S_N = 9 - \frac{2}{N^2}$.

(a) Calculer $\sum_{n=1}^{10} a_n$.

(b) Calculer $\sum_{n=5}^{16} a_n$.

(c) Calculer a_3.

(d) Trouver une formule générale pour a_n.

(e) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exercice 2- Pour tout entier naturel n et tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

(a) calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

(b) Montrer que, pour un $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ **fixé**, les deux suites $\Big(S_n(x)\Big)$ et $\Big(T_n(x)\Big)$ sont bornées.

Exercice 3- On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1.$$

(a) Décomposer en éléments simples la fraction

$$F(x) = \frac{3x-2}{x(x+1)(x+2)}.$$

(b) En déduire qu'il existe des constantes a, b, c telles que

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k = a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + b \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}, \quad n \geq 1.$$

(c) Calculer la limite de $(S_n)_n$ et en déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 4- (a) Montrer que il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [0,1]$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(Indication: démonstration par récurrence)

(b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge et déterminer sa valeur.

(c) Montrer que les séries suivantes convergent et déterminer la valeur de leur somme

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{(n+1)!}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^3-n}{n!}.$$

Étude de la nature d'une série

Exercice 5- Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites telles que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ et vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

(a) Montrer que $u_n \leq \frac{u_0}{v_0} v_n, \forall n \geq 0$.

(b) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(c) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Exercice 6- Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \geq 0$ et m un entier tel que $m \geq 2$.

(a) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} (u_n)^m$ converge.

(b) Est-ce que la réciproque est vraie?

Exercice 7- Soit $p \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Montrer que les séries de terme générale u_n sont divergentes dans les cas suivants:

(a) $u_n = (-1)^n$;

(b) $u_n = \cos(1/n)$;

(c) $u_n = n \sin(1/n)$;

(d) $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

(e) $u_n = n \tan(1/n)$;

(f) $u_n = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^p$;

(g) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^p}, \ n \geq 2$;

(h) $u_n = \frac{e^n}{(n+1)^p}$;

(i) $u_n = \frac{n + \sin n}{n^2 + \cos n}$;

(j) $u_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$.

Exercice 8- Soit $(u_n)_n$ une suite numérique convergeant vers 0. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + c = 0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et en calculer la somme.

Exercice 9- Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.

Montrer que les séries

$$\sum_{n\geq 0} \max\{u_n, v_n\}, \quad \sum_{n\geq 0} \min\{u_n, v_n\}, \quad \sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

sont aussi convergentes.

Critère de comparaison

Exercice 10- À l'aide de la comparaison avec une série géométrique ou de Riemann étudier la nature de la série de terme général $u_n, n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants:

(a) $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$;

(b) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} - 1$;

(c) $u_n = \left(3 + (-1)^n\right)^{-n}$;

(d) $u_n = n^{-1-\frac{2}{n}}$;

(e) $u_n = \frac{1}{1 + x^{2n}}, \ x \in \mathbb{R}$;

(f) $u_n = e^{\cos(\frac{1}{n})} - e^{\cos(\frac{2}{n})}$;

(g) $u_n = x^{\ln(n)}, \ x > 0$;

(h) $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$;

(i) $u_n = n^2 a^{\sqrt{n}}, \ a > 0$;

(j) $u_n = (n^2 + 2an)^{\frac{1}{2}} - (n^3 + 3bn^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2n}; a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}$.

Exercice 11- À l'aide de la comparaison avec une série de Bertrand, étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants:

(a) $u_n = \left(1 - e^{\frac{1}{n^2}}\right)\sqrt{\ln(n)}; \ n \in \mathbb{N}^*$.

(b) $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}; \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(c) $u_n = n^{n^{-a}} - 1; \ a > 0$.

Exercice 12- Soient $a, b \in \mathbb{R}, \ a > 0, \ b > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{an + bk}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{an + bx} dx \leq \frac{1}{an + bk} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{an + bx} dx.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{an + bx} dx \leq S_n \leq \int_0^{n} \frac{1}{an + bx} dx.$$

(c) En déduire $\lim_{n\to\infty} S_n$.

(d) Soit $r > 1$. Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{an^r + bk}$.

Critère de l'intégral

Exercice 13- Étudier la nature de la série de terme général $u_n, n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants:

(a) $u_n = ne^{-n^2}$;

(b) $u_n = \dfrac{1}{1000n+1}$;

(c) $u_n = \dfrac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^s}$, $n \geq 3$ et $s \in \mathbb{R}$.

Critères de Cauchy et de d'Alembert

Exercice 14- Étudier la nature de la série de terme général $u_n, n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants :

(a) $u_n = \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $a \geq 0$;

(b) $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $u_n = \left(\dfrac{\sin^2(n)}{n}\right)^n$;

(d) $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}\Big(\sin(\alpha)\Big)^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 15- Soit a un réel strictement positif. Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

(a) $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$;

(b) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

(c) $u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$;

(d) $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$; $n \geq 1$,
(Indication: on donne la formule de Stirling :
$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty)$);

(e) $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Critère de Raabe-Duhamel

Exercice 16- On considère une série numérique de terme général $u_n > 0$. Soit β un nombre réel. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}o(1) \quad (n \to \infty).$$

(a) Soit $\beta < 1$. Pour un réel $\alpha \in]\beta, 1[$, on pose

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq N \Longrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

(b) Soit $\beta > 1$. Pour un réel $\alpha \in]1, \beta[$, on pose

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq N \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

(c) Soit $n \geq 2$, on considère

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}.$$

i. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et de $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

ii. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ? Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?

Théorème de Mertens

Exercice 17- On considère deux séries numériques de terme général a_n et b_n telles que

- La série de terme général a_n est **absolument convergente**, de somme A,
- La série de terme général b_n est **convergente**, de somme B.

On considère A_n et B_n les sommes partielles des séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ et on pose

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k : c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

La série de terme général c_n est la série **produit de Cauchy** des séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$.

(a) Montrer, par récurrence sur l'entier naturel n, que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad C_n = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}.$$

(b) Montrer que la suite $(C_n - A_n B)$ converge vers 0.

(c) En déduire que la série de terme général c_n est convergente de somme $C = AB$.

(d) Dans cette question on considère

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Étudier la nature de la série de terme général $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

Critère des séries alternées

Exercice 18- Étudier des séries alternées suivantes:

(a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{4}{\ln n}$;

(b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\ln n$;

(c) $\sum_{n\geq 3}\frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$;

(d) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}$;

(e) $\sum_{n\geq 0}\cos\left(n\left(\pi+\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right)$;

(f) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;

(g) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2n}$;

(h) $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$;

(i) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n})$;

(j) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n^p}{n!},\ p\in\mathbb{R}$.

Exercice 19- (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}$ est absolument convergente. On note sa somme par S.

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^n}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

(c) En déduire que la série de terme général $u_n=(-1)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!3^{n-k}}$, $n\geq 0$ est absolument convergente et calculer sa somme en fonction de S.

Exercice 20- (a) Montrer que la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}, n\geq 1$ est convergente.

(b) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$(\forall t\in]-1,+\infty[),\quad f(t)=\ln(1+t)$$

sur l'intervalle $[0,1]$, montrer que la somme de la série de terme général u_n est égale à $\ln(2)$.

Transformation d'Abel et critère d'Abel

Exercice 21- Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites numériques. Pour tout entier naturel n on pose

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k.$$

(a) Montrer que

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*),\quad \sum_{k=0}^{n}a_kb_k=a_nB_n+\sum_{k=0}^{n-1}B_k(a_k-a_{k+1}).$$

Cette dernière égalité est connue sous le nom de **transformation d'Abel**.

(b) Dans cette question, on suppose que

- la série de terme général (a_n-a_{n+1}) est absolument convergente ;
- la suite $(a_n)_n$ est convergente de limite nulle ;
- la suite $(B_n)_n$ est bornée.

Montrer que la série de terme général a_nb_n est convergente. (**C'est le critère d'Abel**).

(c) On suppose dans cette question que

- la suite $(a_n)_n$ est décroissante et convergente de limite nulle ;
- la suite $(B_n)_n$ est bornée.

Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.

(d) Applications : Soit $(a_n)_n$ une suite numérique. On suppose que la série de terme général a_n est convergente.

i. Montrer que la série de terme général $n^{\frac{1}{n}} a_n$ est convergente.

ii. Montrer que la série de terme général $(1 + \dfrac{1}{n})^n a_n$ est convergente.

Exercice 22- On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^\alpha}; \ n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que si $\alpha \leq 0$, alors u_n ne tend pas vers 0.

(b) Montrer que si $\alpha > 0$, alors la série de terme général u_n est convergente.

(c) Étudier la convergence absolue de la série de terme général u_n.